Capacitancia

Antes vimos que un conductor en un campo eléctrico estático es un cuerpo equipotencial y que las cargas depositadas en un conductor se distribuirán sobre su superficie de manera que desaparezca el campo eléctrico en su interior. Suponga que el potencial debido a una carga Q es V. Si se aumentara la carga total en un factor k se incrementaría la densidad superficial de carga ρ_s en el mismo factor en todos los puntos sin afectar la distribución de carga, ya que el conductor sigue siendo un cuerpo equipotencial en una situación estática. De la ecuación

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{S'}\frac{\rho_s}{R}\,da' \qquad (1)$$

podemos llegar a la conclusión de que el potencial de un conductor aislado es directamente proporcional a su carga total. Esto también puede verse del hecho de que al aumentar V en un factor k se incrementa $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ en el mismo factor. Sin embargo, de la ecuación

$$E_n = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \qquad (2)$$

se desprende entonces que ρ_s, y por tanto la carga total Q, también aumentan en un factor de k. Por consiguiente, la razón Q/V no cambia. Escribimos

$$Q = CV, \qquad (3)$$

donde la constante de proporcionalidad C se denomina capacitancia del cuerpo conductor aislado. Su unidad en el SI es el coulomb por volt o farad (F).

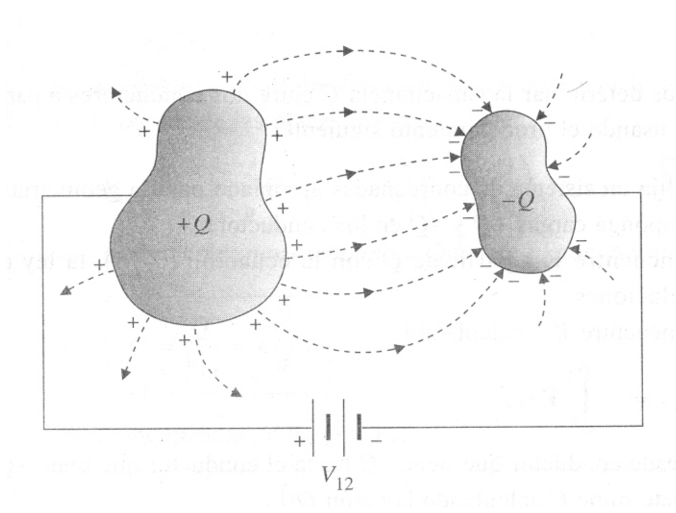

Figura 1
Un capacitor de dos conductores.

El capacitor es de gran importancia en la práctica y consiste en dos conductores separados por el espacio libre o por un medio dieléctrico. Los conductores pueden ser de forma arbitraria, como en la figura 1. Cuando se conecta una fuente de voltaje de corriente continua entre los conductores, ocurre una transferencia de carga que produce una carga +*Q* en un conductor y -*Q* en el otro. En la figura 1 se muestran varias líneas de campo e1éctrico que se originan de las cargas positivas y terminan en las cargas negativas. Observe que las lineas de campo son perpendiculares a las superficies de los conductores, las cuales son superficies equipotenciales. Podemos aplicar la ecuación (3) en esta situación si consideramos que *V* es la diferencia de potencial entre los dos conductores, V_{12}. Es decir,

$$C=\frac{Q}{V_{12}} \quad \text{(F)} \tag{4}$$

La capacitancia de un capacitor es una propiedad física de un sistema de dos conductores. Depende de la geometría del capacitor y de la permitividad del medio.
Podemos determinar la capacitancia *C* entre dos conductores a partir de la ecuación (4) usando el procedimiento siguiente:
1- Elija un sistema de coordenadas apropiado para la geometría especificada.
2- Suponga cargas +*Q* y -*Q* en los conductores.
3- Encuentre ***E*** a partir de *Q* con la condición de borde

$$D_{1n}=\epsilon_1 E_{1n}=\rho_s,$$

la ley de Gauss u otras relaciones.
4- Encuentre V_{12} calculando

$$V_{12}=-\int_2^1 \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$$

desde el conductor que tiene -*Q* hasta el conductor que tiene +*Q*.
5- Determine *C* calculando la razón Q/V_{12}.

Energía y fuerzas electrostáticas

Cuando resolvimos la ecuación de Poisson con cargas discretas nos dimos cuenta que el potencial eléctrico en un punto de un campo eléctric es el trabajo necesario para traer una unidad de carga positiva desde el infinito (potencial de referencia cero) a dicho punto. Para traer una carga Q_2 (lentamente, de manera que puedan ignorarse la energía cinética y los efectos de radiación) desde el infinito contra el campo creado por una carga Q_1 en el espacio libre hasta una distancia R_{12}, la cantidad de trabajo necesaria es

$$W_2=Q_2 V_2=Q_2\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{12}} \tag{5}$$

Puesto que los campos electrostáticos son conservativos, W_2 es independiente de la trayectoria que sigue Q_2. Otra forma de la ecuación (5) es

$$W_2 = Q_1 \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}} = Q_1 V_1 \tag{6}$$

Este trabajo se almacena como energía potencial en el conjunto de las dos cargas. Combinando las ecuaciones (5) y (6) podemos escribir

$$W_2 = \frac{1}{2}(Q_1 V_1 + Q_2 V_2) \tag{7}$$

Suponga ahora que se trae otra carga Q_3 desde el infinito hasta un punto que está a una distancia R_{13} de Q_1 y R_{23} de Q_2; se necesita un trabajo adicional igual a

$$\Delta W = Q_3 V_3 = Q_3 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{23}} \right) \tag{8}$$

La suma de ΔW en la ecuación (8) y W_2 en la ecuación (7) es la energía potencial, W_3, almacenada en el conjunto de las tres cargas Q_1, Q_2 y Q_3. Es decir,

$$W_3 = W_2 + \Delta W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1 Q_2}{R_{12}} + \frac{Q_1 Q_3}{R_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{R_{23}} \right) \tag{9}$$

Podemos reescribir W_3 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} W_3 &= \frac{1}{2}\left[Q_1 \left(\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} \right) + Q_2 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{23}} \right) + Q_3 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{23}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2}(Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3) \end{aligned} \tag{10}$$

En la ecuacion (10), V_1, el potencial en la posición de Q_1, se debe a las cargas Q_2 y Q_3; es *diferente* de V_1 en la ecuacion (6), para el caso de dos cargas. De forma similar, V_2 y V_3 son los potenciales de Q_2 y Q_3, respectivamente, en el conjunto de tres cargas.

Si extendemos este procedimiento para incorporar cargas adicionales, llegamos a la siguiente expresion general de la energía potencial de un grupo de N cargas puntuales discretas en reposo. (El propósito del subindice e en W_e es indicar que la energia es de naturaleza eléctrica.) Tenemos

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} Q_k V_k \quad \text{(J)} \tag{11}$$

La unidad en el SI de la energía, el ***joule*** (J), es demasiado grande para usarse en la física de partículas elementales, de manera que es mas conveniente medir la energía en función de una unidad mucho mas pequeña, llamada ***electrón-volt*** (eV).
Un electrón-volt es la energía o el trabajo necesario para mover un electrón en contra de una diferencia de potencial de un volt.

$$1(\mathrm{eV})=(1.60\times10^{-19})\times1=1.60\times10^{-19} \quad (\mathrm{J}) \tag{12}$$

La energia en (eV) es en esencia la que se expresa en (J) por unidad de carga electrónica.
Es necesario modificar la fórmula de W_e de la ecuación (11) para cargas discretas si existe una distribución de carga continua con densidad ρ_v. Para no tener que pasar por una demostración aparte, sustituimos Q_k por $\rho_v\,dv$ y la sumatoria por una integración, para obtener

$$W_e=\frac{1}{2}\int_{V'}\rho_v V\,dv \quad (\mathrm{J}). \tag{13}$$

En la ecuacion (13), V es el potencial en el punto donde la densidad volumétrica de carga es ρ_v y V' es el volumen de la región donde existe ρ_v. Observe que el valor de W_e en la ecuacion (13) incluye el trabajo (energía propia) necesario para formar la distribución de cargas macroscópicas, ya que es la energía de la interacción entre cada elemento de carga infinitesimal y todos los otros elementos de carga infinitesimales.

Energía electrostática en términos de cantidades de campo

La expresión de la energía electrostática de una distribución de carga en la ecuación (13) contiene la densidad de carga fuente ρ_v y la función de potencial V. En muchos casos es más conveniente contar con una expresión de W_e en términos de las cantidades de campo $\boldsymbol{E}$ o $\boldsymbol{D}$, sin tener que conocer ρ_v de manera explícita. Para ello, sustituimos ρ_v por $\nabla\cdot\boldsymbol{D}$ en la ecuacion (13):

$$W_e=\frac{1}{2}\int_{V'}(\nabla\cdot\boldsymbol{D})V\,dv \tag{14}$$

Después, usando la identidad vectorial

$$\nabla\cdot(V\boldsymbol{D})=V\nabla\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{D}\cdot\nabla V \tag{15}$$

podemos escribir la ecuación (14) como

$$\begin{aligned} W_e&=\frac{1}{2}\int_{V'}\nabla\cdot(V\boldsymbol{D})\,dv-\frac{1}{2}\int_{V'}\boldsymbol{D}\cdot\nabla V\,dv \\ &=\frac{1}{2}\oint_{S'}V\boldsymbol{D}\cdot\mathbf{1}_n\,da+\frac{1}{2}\int_{V'}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\,dv \end{aligned} \tag{16}$$

donde hemos usado el teorema de la divergencia para cambiar la primera integral de volumen por una integral de superficie cerrada, y hemos sustituido $\boldsymbol{E}$ por $-\nabla V$ en la segunda integral de volumen. Puesto que V' puede ser cualquier volumen que incluya todas las cargas, podemos elegirlo de manera que sea una esfera muy grande con radio R. Conforme $R \to \infty$, el potencial eléctrico V y la magnitud del desplazamiento eléctrico D disminuyen segun $1/R$ y $1/R^2$, respectivamente. El área de la superficie limitadora S' aumenta a razón de R^2. Por lo tanto, la integral de superficie de la ecuacion (16) decrece al menos con una razon de $1/R$ y desaparecerá conforme $R \to \infty$. De esta manera, sólo nos queda la segunda integral del lado derecho de la ecuación (16):

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V'} \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E}\, dv \qquad \text{(J)}. \tag{17}$$

Usando la relacion $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ para un medio lineal e isotrópo, podemos escribir W_e exclusivamente en terminos de $\boldsymbol{E}$.

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V'} \epsilon E^2\, dv \qquad \text{(J)}. \tag{18}$$

También podemos definir la densidad de energía electrostática w_e de manera que su integral de volumen sea igual a la energía electrostática total:

$$W_e = \int_{V'} w_e\, dv, \tag{19}$$

donde

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \qquad (\text{Jm}^{-3}). \tag{20}$$

Fuerzas electrostáticas

La ley de Coulomb rige la fuerza entre dos cargas puntuales. En un sistema más complejo de cuerpos cargados sería muy tedioso usar la ley de Coulomb para determinar la fuerza ejercida sobre uno de los cuerpos por las cargas de los demás. Esta situación se presenta incluso en el sencillo caso de la determinación de la fuerza entre las placas de un capacitor de placas paralelas cargado. A continuación analizaremos un método para calcular la fuerza sobre un objeto en un sistema de cargas a partir de la energía electrostática del sistema. Este método se basa en el *principio de desplazamiento virtual*.

Consideraremos un *sistema aislado* de cuerpos conductores cargados y dieléctricos separados entre sí sin conexión con el mundo exterior. Las cargas de los cuerpos son constantes. Imagine que las fuerzas electrostáticas han desplazado uno de los cuerpos una distancia diferencial $\boldsymbol{dl}$ (un desplazamiento virtual). El trabajo mecánico realizado *por el sistema* sería

$$dW = \boldsymbol{F}_Q \cdot d\,\boldsymbol{l} \tag{21}$$

donde $\boldsymbol{F}_Q$ es la fuerza eléctrica total que actúa sobre el cuerpo en las condiciones de cargas constantes. Puesto que se trata de un sistema aislado sin suministro externo de energía, este trabajo mecánico debe realizarse a expensas de la energía electrostática almacenada; es decir,

$$dW = -dW_e = \boldsymbol{F_Q} \cdot d\,\boldsymbol{l} \tag{22}$$

En la ecuación que define el gradiente

$$dV = (\nabla V) \cdot d\,\boldsymbol{l}$$

se observa que el cambio diferencial de un escalar ocasionado por un cambio en posición $d\boldsymbol{l}$ es el producto punto del gradiente del escalar y $d\boldsymbol{l}$; escribimos entonces

$$dW_e = (\nabla W_e) \cdot d\,\boldsymbol{l} \tag{23}$$

Puesto que $d\boldsymbol{l}$ es arbitrario, comparando las ecuaciones (22) y (23) tenemos la siguiente relación.

$$\boldsymbol{F_Q} = -\nabla W_e \qquad \text{(N)}. \tag{24}$$

La ecuación vectorial (24) es en rea1idad tres ecuaciones en el espacio tridimensional. Por ejemplo, la fuerza en la dirección x en coordenadas cartesianas es

$$(F_Q)_x = -\frac{\partial W_e}{\partial x}. \tag{25}$$

El procedimiento es similar para las otras direcciones.